Exercice 10 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^3+k}$.

1°/ Calculer U_1 et U_2.

2°/ Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{n+1}{n^2+1} \le U_n \le \frac{1+n}{n^2}$.

3°/ Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 11 :

1°/ Démontrer que $\forall x > 0$, $\forall n \ge 2$ on a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $U_n = \frac{n+1}{2^n}$.

a) Prouver que $\forall n \le 2$, $U_n \le \frac{2(n+1)}{n^2-n}$.

b) Etudier ainsi la convergence de (U_n).

Exercice 12 :

1°/ Montrer que $\forall x \ge 0$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$.

2°/ Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3°/ Soit la suite (U_n) définie par : $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{\alpha k}{n^2})$ où α est un paramètre réel ≥ 0.

Prouver en utilisant le 1°/ que :

$$\forall n \ge 1 \text{ on a : } \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \le U_n(\alpha) \le \alpha\frac{n+1}{2n}$$

4°/ En déduire que $(U_n(\alpha))$ converge vers $\frac{\alpha}{2}$.

5°/ Soit la suite $V_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3(\frac{k}{n^2})$; $(n \ge 1)$

a) Etablir que $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.